Activités 1 à 12 : Les résultats à retenir

en italique : facultatif

- Ecritures dans différentes bases
- Théorème «Critères de divisibilité par 3 et 5»
- Théorème : n est (im)pair si et seulement si n^2 est (im)pair [ou n (im)pair ⇔ si n^2 (im)pair]
- Théorème : il existe un nombre infini de nombres premiers
- *Théorème «de Fermat»*

- Le principe de la démonstration par récurrence
- Formules démontrées par récurrence : $\sum_{i=1}^{n} i=\frac{n(n+1)}{2}$, $\sum_{i=1}^{n} i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- Théorème : $1+r+r^2+...+r^n=\frac{1-r^{n+1}}{1-r}$,pour un $r\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$ et $\forall\, n\in\mathbb{N}$

- *Démonstration de la règle des signes*
- Théorème : « x est une fraction irréductible » si et seulement si « x est un nombre dont la partie fractionnaire de l'écriture décimale est finie ou infinie périodique »
  [idées de la justification]
- Théorème : la somme de deux nombres rationnels est un nombre rationnel
- Théorème : entre deux deux nombres rationnels différents existe toujours un troisième nombre rationnel
- Théorème : $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$ et $\sqrt{3}\notin\mathbb{Q}$
- Théorème : $8\cdot\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$ et $\sqrt{12}\notin\mathbb{Q}$
- Théorème : $\sqrt[3]{4}\notin\mathbb{Q}$ n'est pas rationnel

- Théorème : il existe une infinité de nombres irrationnels

- Conjecture fausse : la somme de deux nombres irrationnels est un nombre irrationnel

- Définition : π est le rapport constant entre le périmètre d'un cercle et son diamètre (remarque : il faut justifier que ce rapport ne dépend pas du cercle!)

- Théorème : il n'existe pas de « nombre (réel) le plus proche de 1 (et différent de 1) »

- Théorème : entre deux rationnels existe toujours un rationnel

- Théorème : entre deux rationnels existe toujours un irrationnel

---

- Théorème : $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots=+\infty$

  et rappel : $1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^n+\ldots=2$

- *Théorème :* $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{6}$

- Le nombre d'éléments d'un ensemble E est appelé **cardinal** de E, noté card(E) ou #(E)

- On dit qu'un **ensemble est infini** (c'est-à-dire contient un nombre infini d'éléments) si et seulement si il peut être mis en **bijection** avec un de ses sous-ensembles stricts. On note dans ce cas $\#(E) = \infty$

  Rappel
  *Définition : une **bijection** est une **fonction** telle qu' à tout élément de l'ensemble de départ correspond exactement un élément de l'ensemble d'arrivée <u>et</u> à tout élément de l'ensemble d'arrivée correspond exactement un élément de l'ensemble de départ*

  Définition : un ensemble E est dit **dénombrable** quand il existe une bijection entre l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels et E

- il existe une bijection entre $\mathbb{N}$et l'ensemble des nombres pairs, on peut en déduire que $\mathbb{N}$ est infini dénombrable.

- Nous avons montré que : $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}_+^*$ et $\mathbb{Q}$ sont des ensembles infinis dénombrables [approche graphique pour la bijection]

- *Définition : on appelle **aleph0**, noté $\aleph_0$ est le cardinal (c'est-à-dire le « nombre d'éléments ») de $\mathbb{N}$. C'est dire que aleph0 représente « l'infini des entiers naturels »*

- Question : existe-t-il des ensembles infinis qui ne sont pas dénombrables, c'est-à-dire qui ne peuvent pas être mis en bijection avec $\mathbb{N}$?

- Réponse :]0;1[n'est pas dénombrable

  démonstration (par l'absurde) :

  supposons qu'il existe une bijection $\mathbb{N} \rightarrow [0;1[$; ce la signifie qu'on aurait un liste de tous les nombres de [0;1[
  $1 \leftrightarrow r_1$
  $2 \leftrightarrow r_2$
  $3 \leftrightarrow r_3$
  …
  $n \leftrightarrow r_n$
  …
  en écriture décimale, on aurait :
  $r_1 = 0,a_{11}\, a_{12}\, a_{13} \ldots a_{1n} \ldots$
  $r_2 = 0,a_{21}\, a_{22}\, a_{23} \ldots a_{2n} \ldots$
  $r_3 = 0,a_{31}\, a_{32}\, a_{33} \ldots a_{3n} \ldots$
  …
  $r_n = 0,a_{n1}\, a_{n2}\, a_{n3} \ldots a_{nn} \ldots$
  …

  on construit un nombre r de la façon suivante :
  $r= 0,b_1\, b_2\, b_3 \ldots b_n \ldots$ où les chiffres b_n sont définis de telle sorte que
  $b_1 \neq a_{11}$; $b_2 \neq a_{22}$; $b_3 \neq a_{33}$;… ; $b_n \neq a_{nn}$; …

  ainsi on est certain que $r \neq r_n$, pour tout $n \geqslant 1$

  On aurait donc construit un nombre r qui n'est pas dans la liste sensée tous les contenir. C'est absurde. Une telle liste ne peut exister.]0;1[n'est pas dénombrable.

  Remarque : on peut facilement en déduire que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable

- *Définition : on appelle **aleph1**, noté $\aleph_1$ est le cardinal (c'est-à-dire le « nombre d'éléments ») de $\mathbb{R}$. C'est dire que aleph1 représente « l'infini des réels »*

- *Théorème : il existe une bijection entre* $[0;1[$ *et* $\mathbb{R}_+^*$, *entre* $[0;1[$ *et* $\mathbb{R}$

- *Georg Cantor (1845-1918) s'est intéressé à ces questions … et a montré qu'on peut considérer une infinité de niveaux aleph0, aleph1, aleph2, …, en considérant « l'ensemble des parties d'un ensemble donné » ...*

- *L'**hypothèse du continu** dit qu'il n'existe pas entre aleph0 et aleph1 « d'infini intermédiaire ». Savoir si cette hypothèse est vraie, fausse … ou indécidable (!) - dans un système axiomatique donnée – fait toujours l'objet de recherches ...*